DOI: 10.5604/01.3001.0014.1156

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXIII – ZESZYT 2 – 2016

JUSTYNA MOKRZYCKA[1], ANNA PAJOR[2]

FORMALNE PORÓWNANIE MODELI COPULA-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) DLA SUBINDEKSÓW INDEKSU WIG[3]

1. WPROWADZENIE

W ostatnich kilkunastu latach jednym z popularnych narzędzi modelowania zależności na rynkach finansowych stały się kopule. Modele oparte na kopulach warunkowych są konkurencyjne w stosunku do wielowymiarowych modeli zmienności z klasy MGARCH (ang. *multivariate GARCH*) lub MSV (ang. *multivariate stochastic volatility*). O ile w modelach MGARCH czy MSV przedmiotem bezpośredniego opisu są macierze warunkowych kowariancji i liniowych korelacji warunkowych, o tyle kopule pozwalają na opis nieliniowych i asymetrycznych zależności. Za pomocą kopuli możliwa jest w dość prosty sposób konstrukcja rozkładów innych niż eliptyczne oraz charakteryzujących się różnymi zależnościami w ogonach.

Kopula n-wymiarowa jest to funkcja określona na kostce $[0, 1]^n$ o wartościach w przedziale [0, 1], będąca obcięciem do kostki jednostkowej dystrybuanty n-wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa o jednostajnych rozkładach brzegowych na przedziale na [0, 1] (por. Jaworski, 2012; Durante, Sempi, 2016; Doman, 2011). W „aksjomatycznej" definicji kopuli podaje się warunki jakie powinna spełnić funkcja C: $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, aby była kopulą. Warunki te można znaleźć m.in. w pracach Nelsena (1999), Pattona (2001). W 1959 r. Sklar udowodnił, że dla każdej n-wymiarowej dystrybuanty H istnieje taka kopula C, że zachodzi następująca równość $H(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$, gdzie $F_1, \ldots, F_n$ są dystrybuantami brzegowymi. Ponadto, jeśli dystrybuanty brzegowe są ciągłe, to kopula C wyznaczona jest jednoznacznie. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Sklara również jest prawdziwe, tzn. jeżeli C jest n-wymiarową kopulą, a $F_1, \ldots, F_n$ są jednowymiarowymi dystrybuantami, to funkcja $H(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$ jest n-wymiarową dystrybuantą, a $F_1, \ldots, F_n$ jej dystrybuantami brzegowymi (zob. Nelsen, 1999; Jaworski, 2012).

---

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska.

[2] Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: pajora@uek.krakow.pl.

[3] Praca została sfinansowana ze środków przyznanych Wydziałowi Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

Twierdzenie Sklara zostało również sformułowane i udowodnione dla rozkładów warunkowych i warunkowej kopuli (zob. Patton, 2006b). Istotnym elementem umożliwiającym rozszerzenie tego twierdzenia na rozkłady warunkowe jest przyjęcie, iż zbiór informacji, względem którego odbywa się warunkowanie, jest ten sam zarówno w przypadku rozkładów brzegowych, jak i samej kopuli (zob. Patton, 2006b). Przykłady kopuli oraz ich własności zostały przedstawione m.in. w książkach Joego (1997) i Nelsena (1999), zaś w kontekście zastosowań w modelowaniu danych finansowych m.in. w pracach Domana (2011), Pattona (2001, 2006b, 2013), Doman, Domana (2014).

Głównym celem artykułu jest formalne porównanie wybranych specyfikacji modelu Copula-AR-GARCH w opisie zmienności i zależności subindeksów indeksu WIG. Właściwe modelowanie zmienności i zależności cen na rynkach finansowych jest szczególnie ważne m.in. w zarządzaniu ryzykiem, przy wycenie instrumentów pochodnych, oraz przy budowie optymalnych portfeli lub strategii zabezpieczających. Nieadekwatny model kopuli może prowadzić do błędnych oszacowań ryzyka, a w konsekwencji do dużych strat.

Ze względu na własności notowań subindeksów sektorowych indeksu WIG, przedmiotem rozważań będą dwuwymiarowe modele Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1), czyli modele kopuli warunkowej, w których warunkowe wartości oczekiwane i wariancje warunkowe jednowymiarowych rozkładów brzegowych (będących rozkładami *t* Studenta) będą opisywane za pomocą struktur, odpowiednio, autoregresyjnej rzędu pierwszego (AR(1)) i GARCH(1,1). Wyznaczone zostaną prawdopodobieństwa *a posteriori* jedenastu modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1), różniących się strukturą zależności zadaną przez kopulę, i na ich podstawie zbudowany zostanie ranking modeli. Dla porównania dokonana zostanie również estymacja modeli Copula-AR-GARCH metodą największej wiarygodności, a następnie zbudowany ranking modeli na podstawie kryteriów informacyjnych Akaikego oraz Schwarza.

Temat porównania bayesowskich modeli kopula podjęto wcześniej m.in. w pracach Silvy, Lopesa (2008), Rossiego, Ehlersa, Andradego (2012), Craiu, Sabeti (2012), jednak ograniczono się jedynie do zastosowania nieformalnych metod. Wykorzystano bowiem kryteria informacyjne DIC (ang. *deviance information criterion*), Akaikego (ang. *Akaike information criterion*, AIC) oraz Schwarza (ang. *Bayesian information criterion*, BIC). Przeprowadzone badania pokazały, że wszystkie wymienione wyżej kryteria w jednakowy i dość skuteczny sposób pozwalają na wybór właściwego modelu, jeśli w zbiorze rozważanych modeli był ten „prawdziwy", z którego symulowano dane. W niniejszej pracy przedstawione zostaną wyniki bayesowskiego, formalnego (opartego na prawdopodobieństwach *a posteriori* modeli) porównania różnych specyfikacji modeli Copula-AR-GARCH z wykorzystaniem danych rzeczywistych.

W kolejnej części artykułu przedstawiony zostanie model Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1), a następnie omówiona dwustopniowa metoda największej wiarygodności. W części czwartej zdefiniowane zostaną bayesowskie modele Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1). Część piata i szósta poświęcone są bayesowskiej metodzie porównywania modeli i metodom szacowania wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji. Wyniki empiryczne zawarto w części siódmej. Część ostatnia zawiera podsumowanie.

2. KLASYCZNE MODELE COPULA-AR(1)-*t*-GARCH(1,1)

Niech $\{x_t = (x_{1,t}, x_{2,t})', t = -1, 0, 1, ..., T\}$ oznacza szereg czasowy cen aktywów finansowych w chwili t. Dla logarytmicznych stóp zwrotu $\{y_t = (y_{1,t}, y_{2,t})', t = 0, 1, 2, ..., T\}$, obliczonych według formuły $y_{i,t} = 100\ln(x_{i,t} / x_{i,t-1})$, $t = 1, ..., T$, $i = 1, 2$, przyjęto następującą strukturę Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1):

$$y_{i,t} = \beta_{i,0} + \beta_{i,1} y_{i,t-1} + z_{i,t}, \tag{1}$$

$$z_{i,t} = \varepsilon_{i,t} \sqrt{h_{i,t}}, \tag{2}$$

$$h_{i,t} = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} z_{i,t-1}^2 + \gamma_{i,1} h_{i,t-1}, \; i = 1, 2, \; t = 1, 2, ..., T, \tag{3}$$

gdzie $\alpha_{i,0} > 0$, $\alpha_{i,1} \geq 0$, $\gamma_{i,1} \geq 0$, $\{\varepsilon_{i,t}\}_{t=1}^{T} \sim iit(0,1,v_i)$ dla każdego $i \in \{1, 2\}$.[4]

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że łączny rozkład wektora $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$, zadany jest poprzez kopulę o gęstości $c(u_1, u_2)$. Zatem

$$p_\varepsilon(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}) = c(F_{St}(\varepsilon_{1,t};0,1,v_1), F_{St}(\varepsilon_{2,t};0,1,v_2)) f_{St}(\varepsilon_{1,t};0,1,v_1) f_{St}(\varepsilon_{2,t};0,1,v_2), \tag{4}$$

gdzie $F_{St}(\cdot;0,1,v)$ oznacza dystrybuantę jednowymiarowego rozkładu *t* Studenta o zerowej modalnej, jednostkowej precyzji i v stopniach swobody, zaś $f_{St}(\cdot;0,1,v)$ jest gęstością tego rozkładu. Łączny rozkład wektora $(y_{1,t}, y_{2,t})'$, warunkowy względem zbioru ψ_{t-1} (informacji do momentu t-1 włącznie) jest następujący:

$$p_y(y_{1,t}, y_{2,t} | \psi_{t-1}) = p_\varepsilon((y_{1,t} - \mu_{1,t}) / \sqrt{h_{1,t}}, (y_{2,t} - \mu_{2,t}) / \sqrt{h_{2,t}} | \psi_{t-1}) / \sqrt{h_{1,t} h_{2,t}},$$

a zatem

$$\begin{aligned} p_y(y_{1,t}, y_{2,t} | \psi_{t-1}) &= c(F_{St}((y_{1,t} - \mu_{1,t}) / \sqrt{h_{1,t}};0,1,v_1), F_{St}((y_{2,t} - \mu_{2,t}) / \sqrt{h_{2,t}};0,1,v_2)) \times \\ &\times f_{St}((y_{1,t} - \mu_{1,t}) / \sqrt{h_{1,t}};0,1,v_1) f_{St}((y_{2,t} - \mu_{2,t}) / \sqrt{h_{2,t}};0,1,v_2) / \sqrt{h_{1,t} h_{2,t}}, \end{aligned}$$

ostatecznie

$$\begin{aligned} p_y(y_{1,t}, y_{2,t} | \psi_{t-1}) &= c(F_{St}((y_{1,t} - \mu_{1,t}) / \sqrt{h_{1,t}};0,1,v_1), F_{St}((y_{2,t} - \mu_{2,t}) / \sqrt{h_{2,t}};0,1,v_2)) \times \\ &\times f_{St}(y_{1,t};\mu_{1,t},1/h_{1,t},v_1) f_{St}(y_{2,t};\mu_{2,t},1/h_{2,t},v_2). \end{aligned} \tag{5}$$

[4] Zapis $\{\varepsilon_{i,t}\}_{t=1}^{T} \sim iit(0,1,v_i)$ oznacza, że zmienne losowe $\{\varepsilon_{i,t}, t = 1, 2,..., T\}$ są niezależne i mają rozkład *t* Studenta z zerową modalną, jednostkową precyzją i v_i stopniami swobody ($E(\varepsilon_{i,t}^2) = v_i / (v_i - 2)$ dla $v_i > 2$).

Oznaczmy przez $y = [y_1, y_2, ..., y_T]$ macierz obserwacji wymiaru $2 \times T$, przez $\eta = (\eta_G, \eta_C)'$ wektor nieznanych parametrów modelu Copula-AR-GARCH, przy czym η_G jest wektorem parametrów struktury AR(1)-t-GARCH(1,1) natomiast η_C jest wektorem parametrów kopuli. Gęstość łącznego rozkładu macierzy obserwacji, przy ustalonych parametrach, jest iloczynem gęstości rozkładów warunkowych (w notacji pominięto warunki początkowe):

$$p(y;\eta_G,\eta_C) = \prod_{t=1}^{T} c(F_{St}((y_{1,t}-\mu_{1,t})/\sqrt{h_{1,t}};0,1,\nu_1), F_{St}((y_{2,t}-\mu_{2,t})/\sqrt{h_{2,t}};0,1,\nu_2)) \times \\ \times \prod_{j=1}^{2} f_{St}(y_{j,t};\mu_{j,t},1/h_{j,t},\nu_j). \tag{6}$$

Zależności między jednowymiarowymi, warunkowymi rozkładami stóp zwrotu można opisywać za pomocą wielu znanych w literaturze kopuli. W badaniu wykorzystano jedenaście postaci funkcji gęstości $c(u_1, u_2)$. Rozważono dwie kopule eliptyczne: gaussowską i t Studenta; pięć kopuli archimedesowych: Franka, Claytona, Gumbela, Claytona-Gumbela (BB1) i Joego-Claytona (BB7); symetryzowaną kopulę Joego-Claytona; dwie kopule przeżycia: obrócone (o 180 stopni) kopule Claytona i Gumbela. Ponadto, wzięto pod uwagę kopulę odpowiadającą niezależności rozkładów warunkowych. Podstawowe charakterystyki tych kopuli zebrano w tabeli 1.

3. ESTYMACJA MODELU COPULA-AR-GARCH. METODA NAJWIĘKSZEJ WIARYGODNOŚCI

Klasyczną, parametryczną metodą estymacji modelu Copula-AR-GARCH jest metoda największej wiarygodności (MNW). Przy spełnieniu określonych warunków regularności estymator największej wiarygodności jest zgodny, asymptotycznie normalny i asymptotycznie efektywny (zob. Joe, 1997). Korzystając z powyższych oznaczeń estymator największej wiarygodności dla modelu Copula-AR(1)-t-GARCH(1,1) uzyskuje się poprzez maksymalizację logarytmu naturalnego funkcji wiarygodności, który w tym przypadku ma następującą postać (dla jasności w zapisie uwzględniono parametry rozważanych funkcji):

$$\ln(L(\eta_G,\eta_C;y)) = \\ = \sum_{t=1}^{T} \ln(c(F_{St}((y_{1,t}-\mu_{1,t})/\sqrt{h_{1,t}};0,1,\nu_1), F_{St}((y_{2,t}-\mu_{2,t})/\sqrt{h_{2,t}};0,1,\nu_2);\eta_C,\eta_G)) + \\ + \sum_{t=1}^{T} \ln(f_{St}(y_{1,t};\mu_{1,t},1/h_{1,t},\nu_1;\eta_{G1})) + \sum_{t=1}^{T} \ln(f_{St}(y_{2,t};\mu_{2,t},1/h_{2,t},\nu_2;\eta_{G2})), \tag{7}$$

gdzie $\eta_G = (\eta_{G1}, \eta_{G2})$, przy czym jedną ze składowych wektora η_{Gi} jest liczba stopni swobody, ν_i.

W 1996 r. H. Joe i J. J. Xu zaproponowali dwustopniową metodę estymacji parametrów kopuli (zob. Joe, Xu, 1996) oznaczaną w skrócie IFM (ang. *the method of Inference Functions for Margins*) i nazywaną metodą funkcji wnioskowania dla rozkładów brzegowych (zob. Doman, 2011). Polega ona na estymacji parametrów rozkładów brzegowych w pierwszym kroku, a następnie, przy danych oszacowaniach tych parametrów, estymacji parametrów struktury zależności. Estymator otrzymany metodą IFM, przy spełnieniu określonych warunków regularności, przedstawionych w pracy Pattona (2006a), jest zgodny i asymptotycznie normalny. Ponadto, estymator ten, jak przedstawiają badania prowadzone przez Joego (2005) oraz Pattona (2006a) dla wybranych modeli, wykazuje się także asymptotyczną efektywnością, jednak najczęściej nieco niższą w porównaniu z jednostopniową metodą największej wiarygodności (zob. Patton, 2012).

W naszym przypadku, z uwagi na postać logarytmu funkcji wiarygodności, metoda IFM sprowadza się do wyznaczenia w pierwszym etapie ocen parametrów warunkowych rozkładów brzegowych, tj.

$$\hat{\eta}_{G1} = \arg\max_{\eta_{G1}} \sum_{t=1}^{T} \ln(f_{St}(y_{1,t};\mu_{1,t},1/h_{1,t},v_1;\eta_{G1})),$$

$$\hat{\eta}_{G2} = \arg\max_{\eta_{G2}} \sum_{t=1}^{T} \ln(f_{St}(y_{2,t};\mu_{2,t},1/h_{2,t},v_2;\eta_{G2})).$$

W drugim etapie, w celu wyznaczenia ocen parametrów kopuli, otrzymane wartości estymatorów wykorzystywane są w maksymalizacji pozostałych składowych logarytmu funkcji wiarygodności:

$$\hat{\eta}_C = \arg\max_{\eta_C} \sum_{t=1}^{T} \ln(c(F_{St}((y_{1,t}-\mu_{1,t})/\sqrt{h_{1,t}};0,1,\hat{v}_1),F_{St}((y_{2,t}-\mu_{2,t})/\sqrt{h_{2,t}};0,1,\hat{v}_2);\eta_C,\hat{\eta}_G)).$$

Prezentowane w części siódmej artykułu wyniki empiryczne uzyskano poprzez zastosowanie właśnie metody IFM – obliczenia zostały wykonane w programie R z wykorzystaniem dostępnych pakietów oraz własnych autorskich procedur obliczeniowych.

W celu porównania dopasowania modeli do danych zastosowano kryterium informacyjne zaproponowane przez Akaikego (1973), AIC, oraz kryterium Schwarza (1978), BIC. Wartość kryterium Akaikego obliczono ze wzoru $AIC(k) = -2ln(L(\hat{\eta}_G,\hat{\eta}_C;y))+2k$, gdzie $L(\hat{\eta}_G,\hat{\eta}_C;y)$ jest wartością funkcji wiarygodności w jej maksimum, a k jest liczbą parametrów modelu. Natomiast kryterium Schwarza przyjmuje następującą postać: $BIC(k) = -2ln(L(\hat{\eta}_G,\hat{\eta}_C;y)) + ln(T)k$, gdzie T jest liczbą obserwacji. W ramach danego kryterium za model najlepiej dopasowany do danych uznaje się ten, dla którego wartość kryterium jest najmniejsza. Wybór najlepszego modelu na podstawie kryteriów informacyjnych jest metodą nieformalną (*ad hoc*) i nie daje pełnych podstaw do wnioskowania, że struktura zależności jest dobrze opisana przez wskazany model. Innym

Tabela 1.

Wybrane kopule i ich podstawowe charakterystyki

Kopula	Gęstość kopuli	Parametry kopuli
Franka	$c_\theta^{Fr}(u_1,u_2)=\dfrac{\theta(1-e^{-\theta})e^{-\theta(u_1+u_2)}}{[1-e^{-\theta}-(1-e^{-\theta u_1})(1-e^{-\theta u_2})]^2}$	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Claytona	$c_\theta^{Cl}(u_1,u_2)=(1+\theta)(u_1u_2)^{-\theta-1}(C_\theta^{Cl}(u_1,u_2))^{2\theta+1}$, gdzie $C_\theta^{Cl}(u_1,u_2)=(\max\{u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1,0\})^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta > 0$
Gumbela	$c_\theta^{Gu}(u_1,u_2)=\dfrac{C_\theta^{Gu}(u_1,u_2)(\ln u_1 \ln u_2)^{\theta-1}}{u_1u_2((-\ln u_1)^\theta+(-\ln u_2)^\theta)^{2-\frac{1}{\theta}}}\times\left[((-\ln u_1)^\theta+(-\ln u_2)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}+\theta-1\right]$, gdzie $C_\theta^{Gu}(u_1,u_2)=\exp(-[(-\ln u_1)^\theta+(-\ln u_2)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$	$\theta \geq 1$
Claytona-Gumbela (BB1)	$c_{\theta,\delta}^{CG}(u_1,u_2)=(a_1a_2)^{\delta-1}(u_1u_2)^{-\theta-1}\times\left((1+\theta)a^{\frac{2}{\delta}-2}b^{\frac{-1}{\theta}-2}+\theta(\delta-1)a^{\frac{1}{\delta}-2}b^{\frac{-1}{\theta}-1}\right)$, gdzie $a_1=u_1^{-\theta}-1,\ a_2=u_2^{-\theta}-1,\ a=a_1^{\delta}+a_2^{\delta},\ b=1+a^{\frac{1}{\delta}}$	$\theta > 0,\ \delta \geq 1$
Joego-Claytona (BB7)	$c_{\kappa,\gamma}^{JC}(u_1,u_2)=(\tilde{u}_1\tilde{u}_2)^{\kappa-1}((1-\tilde{u}_1^{\kappa})(1-\tilde{u}_2^{\kappa}))^{-\gamma-1}\times$ $\times A^{-2\kappa+1}(1-A^{\kappa})^{2\gamma+2}(\kappa-1+\kappa(\gamma+1)A^{\kappa}(1-A^{\kappa})^{-1})$, gdzie $\tilde{u}_1=1-u_1,\ \tilde{u}_2=1-u_2,\ A=1-C_{\kappa,\gamma}^{JC}(u_1,u_2)$, $C_{\kappa,\gamma}^{JC}(u_1,u_2)=1-\left(1-\{[1-(1-u_1)^{\kappa}]^{-\gamma}+[1-(1-u_2)^{\kappa}]^{-\gamma}-1\}^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$	$\kappa \geq 1,\ \gamma > 0$
Symetryzowana Joego-Claytona	$c_{\kappa,\gamma}^{SJC}(u_1,u_2)=\frac{1}{2}c_{\kappa,\gamma}^{JC}(u_1,u_2)+\frac{1}{2}c_{\kappa',\gamma'}^{JC}(1-u_1,1-u_2)$, gdzie $\kappa'=\dfrac{1}{\log_2(2-2^{-\frac{1}{\gamma}})}$, $\gamma'=-\dfrac{1}{\log_2(2-2^{\frac{1}{\kappa}})}$	$\kappa \geq 1,\ \gamma > 0$
Obrócona Claytona	$c_\theta^{obCl}(u_1,u_2)=c_\theta^{Cl}(1-u_1,1-u_2)$	$\theta > 0$
Obrócona Gumbela	$c_\theta^{obGu}(u_1,u_2)=c_\theta^{Gu}(1-u_1,1-u_2)$	$\theta \geq 1$
Normalna (gaussowska)	$c_R^{Ga}(u_1,u_2)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\psi'\left(R^{-1}-I_2\right)\psi\right)$, gdzie $\psi=\left(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2)\right)'$, $R=\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$, Φ^{-1} jest odwrotnością dystrybuanty jednowymiarowego, standardowego rozkładu normalnego.	$\rho \in (-1,1)$
t Studenta	$c_{R,v}^{t}(u_1,u_2)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right)^2}\dfrac{\left(1+\frac{1}{v}\psi' R^{-1}\psi\right)^{-\frac{v+2}{2}}}{\prod_{i=1}^{2}\left(1+\frac{1}{v}\psi_i^2\right)^{-\frac{v+1}{2}}}$ gdzie $\psi=\left(F_{St}^{-1}(u_1;0,1,v),F_{St}^{-1}(u_2;0,1,v)\right)'$, $F_{St}^{-1}(\cdot;0,1,v)$ jest odwrotnością dystrybuanty jednowymiarowego rozkładu *t* Studenta z zerową modalną, jednostkową precyzją i z liczbą stopni swobody v.	$\rho \in (-1,1),\ v > 2$

Źródło: opracowanie własne na podstawie Joe (1997), Jondeau, Rockinger (2006), Patton (2006b), Doman (2011).

Tau Kendalla	Zależności w ogonach
$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta}\left(1 - D_1(\theta)\right)$, gdzie $D_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1}dt$ funkcja Debye'a	$\lambda^U = 0,\ \lambda^L = 0$
$\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta+2}$	$\lambda^U = 0,\ \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$
$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}},\ \lambda^L = 0$
$\tau_{\theta,\delta} = 1 - \frac{2}{(2+\theta)\delta}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}},\ \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\delta\theta}}$
$\tau_{\kappa,\gamma} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\gamma(\kappa-2)} - \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\gamma(\kappa-2)} B\left(\frac{2}{\kappa}, \gamma+1\right) & \kappa \neq 2 \\ 1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}(\psi(\gamma+2) - \psi(1)) & \kappa = 2 \end{cases}$ gdzie $B(x,y)$ jest funkcją beta, zaś $\psi(x)$ funkcją psi (zob. Abramowitz, Stegun, 1968). Wyprowadzenie wzoru dla $\tau_{\kappa,\gamma}$ znajduje się w książce Domana (2011).	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\kappa}},\ \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\gamma}}$
–	$\lambda^U = 2^{-\frac{1}{\gamma'}},\ \lambda^L = 2 - 2^{\frac{1}{\kappa'}}$
$\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta+2}$	$\lambda^U = 2^{-\frac{1}{\theta}},\ \lambda^L = 0$
$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda^U = 0,\ \lambda^L = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
$\tau = \frac{2}{\pi}\arcsin(\rho)$	$\lambda^U = 0,\ \lambda^L = 0$
$\tau = \frac{2}{\pi}\arcsin(\rho)$	$\lambda^U =$ $= 2F_{St}\left(-\sqrt{v+1}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}};0,1,v+1\right)$ $\lambda^L = \lambda^U$

sposobem weryfikacji modelu jest wykorzystanie tzw. testów zgodności (zob. Doman, 2011; Genest, Rémillard, Beaudoin, 2009; Kojadinovic, Yan, Holmes, 2011). Fang, Madsen i Liu w pracy z 2014 r. metodami symulacyjnymi porównali wnioski płynące z zastosowania kryterium informacyjnego AIC oraz wielokrotnych testów zgodności (ang. *multiplier goodnes-of-fit*) dla wybranych pięciu rodzajów kopuli. Stwierdzili, że stosowanie kryterium AIC przy założeniu, że struktura zależności opisana jest jedną z typowanych kopuli, daje lepsze wyniki niż wielokrotne testy zgodności (zob. Fang, Madsen, Liu, 2014). W przeciwieństwie do przeprowadzenia testów zgodności, obliczenie wartości kryterium AIC praktycznie nie wymagało większego wysiłku obliczeniowego.

Probabilistycznego i w pełni formalnego narzędzia porównywania mocy wyjaśniającej różnych modeli dostarcza bayesowskie wnioskowanie statystyczne (zob. Jeffreys, 1967; Osiewalski, Steel, 1993; Osiewalski, 2001). Dlatego też poniżej zostaną skonstruowane bayesowskie modele Copula-AR-GARCH oraz przedstawione zasady formalnego porównywania modeli.

4. BAYESOWSKIE MODELE COPULA-AR(1)-*t*-GARCH(1,1)

W bayesowskim modelu statystycznym wszystkie nieznane wielkości (w tym parametry) traktowane są jako zmienne losowe. Bayesowski model statystyczny zdefiniowany jest jednoznacznie przez gęstość łącznego rozkładu macierzy obserwacji y oraz wektora parametrów $\eta = (\eta_G', \eta_C')' \in H = H_G \times H_C \subseteq \mathrm{R}^m$:

$$p(y, \eta) = p(y|\eta)\, p(\eta) = p(y|\eta_G, \eta_C)\, p(\eta_G, \eta_C), \tag{8}$$

gdzie $p(\eta)$ jest gęstością rozkładu *a priori* wektora η, $p(y|\eta)$ jest tzw. gęstością próbkową macierzy obserwacji (zob. równanie (6)).

Rozkład *a priori* na przestrzeni[5] $H_G \times H_C \subseteq \mathrm{R}^m$ dobrano tak, aby parametry warunkowych (względem całej przeszłości i parametrów) rozkładów brzegowych y_t (czyli składowych wektora η_G) były niezależne od parametrów kopuli (czyli η_C):

$$p(\eta_G, \eta_C) = p(\eta_G)\, p(\eta_C). \tag{9}$$

W dwuwymiarowych modelach Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) z warunkowymi, brzegowymi rozkładami *t* Studenta dla wektora η_G, o składowych $\eta_{G1} = (\beta_{1,0}, \beta_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \gamma_{1,1}, v_1)'$ i $\eta_{G2} = (\beta_{2,0}, \beta_{2,1}, \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \gamma_{2,1}, v_2)'$, przyjęto następującą gęstość rozkładu *a priori*:

$$p(\eta_G) = p(\beta_0)\,p(\beta_1)\prod_{i=1}^{2} p(\alpha_{i,0})\,p(\alpha_{i,1}, \gamma_{i,1})\,p(v_i), \tag{10}$$

[5] Wartość m, czyli liczba parametrów będących przedmiotem wnioskowania, zależy od specyfikacji modelu.

gdzie

$$p(\beta_0) = f_{N,2}(\beta \mid \beta_{0,b}, \sigma_b^2 I),\ \beta_0 = (\beta_{1,0}, \beta_{2,0})',\ \beta_{0,b} = (0{,}0)',\ \sigma_b^2 = 1,$$

$$p(\beta_1) = \frac{1}{4} I_{(-1,\,1)^2}(\beta_1),\ \beta_1 = (\beta_{1,1}, \beta_{2,1})',$$

$$p(\alpha_{i,0}) = f_{Exp}(\alpha_{i,0} \mid \lambda_\alpha),\ \lambda_\alpha = 1,$$

$$p(\alpha_{i,1}, \gamma_{i,1}) = \frac{1}{2} I_B(\alpha_{i,1}, \gamma_{i,1}),\ B = [0,1]^2 \cap \{(x,y)': x + y < 1\},$$

$$p(\nu_i) \propto \lambda e^{-\lambda \nu} I_{(2,\,+\infty)}(\nu_i),\ \lambda = \frac{1}{10},\ i = 1, 2.$$

Symbol $f_{N,p}(\cdot|a, A)$ oznacza gęstość p-wymiarowego rozkładu normalnego o wektorze wartości oczekiwanych a i macierzy kowariancji A, $I_B(\cdot)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru B, natomiast $f_{Exp}(\cdot|\lambda)$ oznacza gęstość rozkładu wykładniczego ze średnią $1/\lambda$. Rozkład *a priori* parametrów struktury AR-GARCH jest właściwy (tzn. jest miarą unormowaną) i odzwierciedla raczej nikłą wstępną wiedzę (przed wglądem w dane) o wartościach tych parametrów. Rozkłady *a priori* parametrów kopuli zestawiono w tabeli 2. Zostały one dobrane na podstawie symulacji, tak by we wszystkich modelach rozkład *a priori* współczynnika tau Kendalla był dość rozproszony.

Tabela 2.

Rozkłady *a priori* parametrów kopuli

Kopula	Parametry kopuli	Rozkład *a priori*
Franka	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\theta \sim N(0{,}100)$
Claytona	$\theta > 0$	$\theta \sim Exp(1)$
Gumbela	$\theta \geq 1$	$\theta \sim 1 + Exp(1)$
Claytona-Gumbela (BB1)	$\theta > 0$ $\delta \geq 1$	$\theta \sim Exp(1)$, $\delta \sim 1 + Exp(1)$
Joego-Claytona (BB7)	$\kappa \geq 1$ $\gamma > 0$	$\kappa \sim 1 + Exp(1)$, $\gamma \sim Exp(1)$
Obrócona Claytona	$\theta > 0$	$\theta \sim Exp(1)$
Obrócona Gumbela	$\theta \geq 1$	$\theta \sim 1 + Exp(1)$
Symetryzowana Joego-Claytona	$\kappa \geq 1$ $\gamma > 0$	$\kappa \sim 1 + Exp(1)$, $\gamma \sim Exp(1)$
Normalna	$\rho \in (-1{,}1)$	$\rho \sim U(-1{,}1)$
t Studenta	$\rho \in (-1{,}1)$, $\nu > 2$	$\rho \sim U(-1{,}1)$, $\nu \sim Exp(1/10)\, I_{(2,+\infty)}$

$N(a, A)$ oznacza rozkład normalny o średnie a i wariancji równej A, $Exp(\lambda)$ oznacza rozkład wykładniczy o średniej $1/\lambda$, $1 + Exp(\lambda)$ – rozkład wykładniczy przesunięty o 1, czyli funkcja gęstości jest następująca $p(\theta) = \lambda e^{-\lambda(\theta-1)} I_{(1,+\infty)}(\theta)$, $U(a, b)$ – rozkład jednostajny na przedziale (a, b), $Exp(\lambda)I_B$ – rozkład wykładniczy ucięty do zbioru B.

Źródło: opracowanie własne.

5. BAYESOWSKIE PORÓWNANIE MODELI

W ujęciu bayesowskim podstawowym kryterium porównawczym modeli są ich prawdopodobieństwa *a posteriori*, obliczone ze wzoru Bayesa (zob. Osiewalski, Steel, 1993; Zellner, 1971). Model najbardziej prawdopodobny *a posteriori* może być traktowany jako „najlepiej dopasowany" do danych empirycznych. Załóżmy, że mamy zbiór l modeli bayesowskich, $\{M_1, M_2, ..., M_l\}$, parami wykluczających się:

$$M_i\text{: } p_i(y, \eta_i) = p_i(y|\eta_i)\ p_i(\eta_i),\ i = 1, ..., l, \tag{11}$$

gdzie $\eta_i \in H_i$ oznacza wektor parametrów modelu M_i, $p_i(\eta_i)$ jest gęstością rozkładu *a priori* parametrów modelu M_i, zaś $p_i(y|\eta_i)$ jest próbkową gęstością macierzy obserwacji w tym modelu. Niech ponadto $p(M_1), p(M_2), ..., p(M_l)$ będą prawdopodobieństwami *a priori* tych modeli oraz $\sum_{j=1}^{l} p(M_j) = 1$. Wówczas, ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu M_i wynosi:

$$p(M_i \mid y) = \frac{p(M_i)p(y \mid M_i)}{\sum_{j=1}^{l} p(M_j)p(y \mid M_j)},\ i = 1, 2, \ldots, l, \tag{12}$$

gdzie $p(y| M_i)$ jest brzegową gęstością macierzy obserwacji w modelu M_i:

$$p(y \mid M_i) = p_i(y) = \int_{H_i} p_i(y \mid \eta_i) p_i(\eta_i)\, d\eta_i. \tag{13}$$

Jeśli chodzi o wybór prawdopodobieństw *a priori* $p(M_i)$, $i = 1, ..., l$, w literaturze proponuje się przyjąć iż są one jednakowe lub dobrać je tak, aby modele prostsze (o mniejszej liczbie parametrów) były bardziej prawdopodobne, zgodnie z tzw. zasadą brzytwy Ockhama (zob. Jeffreys, 1961; Osiewalski, Steel, 1993). Ponieważ różnica w liczbie parametrów rozważanych modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) wynosi co najwyżej dwa, więc w części empirycznej przyjęto jednakowe prawdopodobieństwa *a priori* modeli.

6. METODY SZACOWANIA WARTOŚCI BRZEGOWEJ GĘSTOŚCI MACIERZY OBSERWACJI

Obliczenie prawdopodobieństw *a posteriori* modeli wymaga oszacowania wartości brzegowych gęstości macierzy obserwacji, $p_i(y)$, czyli stałych normujących odpowiednich rozkładów *a posteriori*. Zazwyczaj nie można tego zrobić analitycznie, gdyż związane jest to z obliczeniem bardzo skomplikowanych całek. Dlatego też w literaturze proponuje się różne metody Monte Carlo, a w szczególności te oparte na łańcuchach Markowa (ang. *Markov – chain Monte Carlo*, MCMC). Najczęściej jest to losowanie Gibbsa lub algorytm Metropolisa i Hastingsa (zob. Newton, Raftery, 1994; Kass, Raftery, 1995; Chib, 1995; Chib, Jeliazkov, 2001; Raftery, 1996; Lenk, 2009; Pajor, Osiewalski, 2013). W niniejszej pracy wykorzystano algorytm Metropolisa i Hastingsa. Wstępne stany łańcucha generowano z rozkładu *t* Studenta z trzema stopniami swobody, scentrowanego wokół ostatniego stanu łańcuch Markowa, i macierzą kowariancji ustaloną na podstawie wstępnych przebiegów algorytmu (por. Osiewalski, Pipień, 2004). Uzyskane w ten sposób wektory pseudolosowe (z rozkładu *a posteriori* jako rozkładu stacjonarnego) wykorzystano do obliczenia ocen wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji. Poniżej przedstawiono trzy metody szacowania $p_i(y)$.

6.1. SKORYGOWANA ŚREDNIA HARMONICZNA

Dla dowolnego zbioru $A_i \subseteq H_i$, takiego że $0 < P_i(A) < \infty$ oraz $0 < P_i(A_i|y) < \infty$, zachodzi następująca równość (zob. Lenk, 2009; Pajor, Osiewalski, 2013)[6]:

$$p_i(y) = P_i(A_i)\left(\int_{H_i} \frac{I_{A_i}(\eta_i)}{p_i(y\,|\,\eta_i)} p_i(\eta_i\,|\,y)\, d\eta_i\right)^{-1}, \tag{14}$$

z której wynika, że estymatorem wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji jest tzw. skorygowana średnia harmoniczna (ang. *Corrected Harmonic Mean*, por. Newton, Raftery, 1994):

$$\hat{p}_{i,CHME}(y) = \hat{P}_i(A_i)\left(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \frac{I_{A_i}(\eta_i^{(k)})}{p_i(y\,|\,\eta_i^{(k)})}\right)^{-1}, \tag{15}$$

gdzie $\{\eta_i^{(k)}\}_{k=1}^{K}$ jest próbą pseudolosową z rozkładu *a posteriori* w *i*-tym modelu, zaś $\hat{P}_i(A_i)$ jest oszacowaniem prawdopodobieństwa *a priori* zbioru A_i.

Lenk (2009) zaproponował kilka metod estymacji $P_i(A_i)$ – w niniejszym artykule wykorzystano metodę Monte Carlo z funkcją ważności (MCIS). Jako funkcję ważności przyjęto gęstość wielowymiarowego rozkładu normalnego, scentrowanego wokół wektora wartości oczekiwanych *a posteriori*, z macierzą kowariancji równą w przybliżeniu macierzy kowariancji rozkładu *a posteriori* (obliczoną numerycznie na podstawie symulacji MCMC). Zbiór A_i również został ustalony na podstawie próby pseudolosowej z rozkładu *a posteriori*:

$$A_i = \times_j [\min\{\eta_{i,j}^{(k)}\}, \max\{\eta_{i,j}^{(k)}\}] \cap \{\eta_i : p_i(y\,|\,\eta_i) \geq L_i\},$$

gdzie $L_i = \min\{p_i(y\,|\,\eta_i^{(k)}), k = 1, ..., K\}$, $\eta_{i,j}^{(k)}$ oznacza *j*-tą składową wektora $\eta_i^{(k)}$. Jest to więc przekrój (iloczyn mnogościowy) kostki wyznaczonej przez skrajne stany łańcucha Markowa i zbioru punktów spełniających warunek, że wartość funkcji wiarygodności jest niemniejsza od najmniejszej z uzyskanych w ramach symulacji MCMC.

---

[6] $P_i(A)$ – oznacza prawdopodobieństwo *a priori* zbioru A_i (P_i nie musi być miarą unormowaną, wystarczy, że jest miarą σ-skończoną, zob. Pajor, Osiewalski, 2013), $P_i(A_i|y)$ – oznacza prawdopodobieństwo *a posteriori* zbioru A_i.

6.2. ESTYMATOR CHIBA I JELIAZKOVA

Estymator $p_i(y)$ zaproponowany w artykule Chiba (1995) oraz Chiba, Jeliazkova (2001) oparty jest na następującej równości:

$$\ln p_i(y) = \ln p_i(y \mid \eta_i^*) + \ln p_i(\eta_i^*) - \ln p_i(\eta_i^* \mid y), \tag{16}$$

która zachodzi dla każdego $\eta_i^* \in H_i$, takiego że $p_i(\eta_i^* \mid y) \neq 0$.

Aby wyznaczyć ln $p_i(y)$, wystarczy więc obliczyć wartości składowych prawej strony powyższej równości w dowolnie wybranym punkcie $\eta_i^* \in H_i$. Jeśli znamy stałe normujące rozkładu *a priori* oraz rozkładu próbkowego, to wartości $p_i(y \mid \eta_i^*)$ i $p(\eta^*)$ można łatwo wyznaczyć. Ponieważ stała normująca rozkładu *a posteriori* nie jest znana, więc nie można w prosty sposób obliczyć $p(\eta^* \mid y)$. Chib (1995) zaproponował metodę estymacji $p(\eta^* \mid y)$ w ramach próbnika Gibbsa. Metoda ta została uogólniona przez Chiba, Jeliazkova (2001) na sytuacje, w których stosowany jest algorytmu Metropolisa i Hastingsa (MH).

Algorytm MH jest procedurą umożliwiającą symulację łańcucha Markowa z niestandardowego rozkładu prawdopodobieństwa, w szczególności rozkładu *a posteriori*, poprzez losowania ze znanego rozkładu prawdopodobieństwa (zob. Tierney, 1994; Pajor, 2003). Niech $k_i : \mathsf{R}^{m_i} \times \mathsf{R}^{m_i} \to \mathsf{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary Lebesgue'a, ponadto

$$k_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i) = \begin{cases} q_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i)\alpha_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i) & \eta_i \neq \tilde{\eta}_i \\ 0 & \eta_i = \tilde{\eta}_i \end{cases},$$

gdzie $q_i(\eta_i, \cdot)$ jest gęstością (względem miary Lebesgue'a) pomocniczego, arbitralnie dobranego jądra Markowa (ang. *candidate-generating density*) według którego generowane są tzw. wartości kandydackie (ang. *candidate value*) dla następnej realizacji łańcucha w *i*-tym modelu; natomiast $\alpha_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i)$ jest funkcją akceptacji przy przejściu ze stanu η_i do $\tilde{\eta}_i$, $\alpha_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i) = \min\left\{1, \dfrac{p_i(\tilde{\eta}_i \mid y) q_i(\tilde{\eta}_i, \eta_i)}{p_i(\eta_i \mid y) q_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i)}\right\}$ dla $p_i(\eta_i \mid y) q_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i) \neq 0$ i $\alpha_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i) = 1$ dla $p_i(\eta_i \mid y) q_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i) = 0$. Z tego, że funkcja $k_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i)$ spełnia warunek odwracalności dla miary zadanej przez gęstość rozkładu *a posteriori* wynika następująca równość (zob. Chib, Jeliazkov, 2001):

$$p_i(\tilde{\eta}_i \mid y) = \frac{\int\limits_{H_i} p_i(\eta_i \mid y) q_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i) \alpha_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i)\, d\eta_i}{\int\limits_{H_i} q_i(\tilde{\eta}_i, \eta_i) \alpha_i(\tilde{\eta}_i, \eta_i)\, d\eta_i}, \tag{17}$$

którą można zapisać:

$$p_i(\tilde{\eta}_i \mid y) = \frac{E_{\eta_i|y}(q_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i)\alpha_i(\eta_i, \tilde{\eta}_i))}{E_{q_i(\eta_i|\tilde{\eta}_i)}(\alpha_i(\tilde{\eta}_i, \eta_i))}, \tag{18}$$

gdzie $E_{\eta_i|y}(\cdot)$ oznacza wartość oczekiwaną względem rozkładu *a posteriori* wektora η_i, natomiast $E_{q_i(\eta_i|\tilde{\eta}_i)}(\cdot)$ jest wartością oczekiwaną względem rozkładu zadanego przez gęstość rozkładu pomocniczego. Zgodnym estymatorem wartości funkcji gęstości $p_i(\eta_i^* \mid y)$ może więc być:

$$\hat{p}_i(\eta_i^* \mid y) = \frac{G^{-1}\sum_{g=1}^{G}\alpha_i(\eta_i^{(g)},\eta_i^*)q_i(\eta_i^{(g)},\eta_i^*)}{J^{-1}\sum_{j=1}^{J}\alpha_i(\eta_i^*,\eta_i^{(j)})}, \tag{19}$$

gdzie $\{\eta_i^{(g)}\}_{g=1}^{G}$ jest próbą pseudolosową z rozkładu *a posteriori*, zaś $\{\eta_i^{(j)}\}_{j=1}^{J}$ jest próbą pseudolosową z rozkładu zadanego przez gęstość $q_i(\eta_i^*,\eta_i)$. Zgodnie z przedstawionym rozumowaniem η_i^* może być dowolnym punktem w przestrzeni parametrów, w którym $p_i(\eta_i^* \mid y) \neq 0$, ale w praktyce metoda Chiba i Jeliazkova daje dobre wyniki, gdy η_i^* znajduje się w obszarze wysokich wartości funkcji gęstości rozkładu *a posteriori* (np. jest to modalna tego rozkładu). Chib, Jeliazkov (2001) przedstawili również sposób szacowania $p_i(\eta_i^* \mid y)$ w sytuacji gdy algorytm MH stosowany jest z podziałem wektora η_i^* na bloki, nie będzie on jednak stosowany w niniejszym artykule.

6.3. ESTYMATOR LAPLACE'A I METROPOLISA

Estymator Laplace'a i Metropolisa oparty jest na metodzie Laplace'a przybliżania całek (zob. de Bruijn, 1970; Raftery, 1996) oraz symulacjach z rozkładu *a posteriori*. Wykorzystując rozwinięcie funkcji rzeczywistej $f(u)$ w szereg Taylora wokół punktu u^* (wektora wymiaru $m \times 1$, w którym funkcja f ma maksimum) otrzymujemy:

$$\int e^{f(u)}\, du \approx e^{f(u^*)}(2\pi)^{m/2}\det\left(-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u'}(u^*)\right]^{-1}\right)^{1/2},$$

gdzie $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u'}(u^*)$ oznacza macierz drugich pochodnych cząstkowych funkcji f (macierz Hessego) w punkcie u^*. Zastosowanie tego przybliżenia do całki $\int_{H_i} p_i(y \mid \eta_i) p_i(\eta_i)\, d\eta_i$ oraz wykorzystanie symulacji MCMC prowadzi do następującego estymatora wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji:

$$\hat{p}_{i,LM}(y) = (2\pi)^{m_i/2}\det(\Psi)^{1/2} p_i(y \mid \tilde{\eta}_i) p_i(\tilde{\eta}_i), \tag{20}$$

gdzie $\tilde{\eta}_i$ jest tutaj modalną *a posteriori* funkcji $\ln[p_i(y \mid \eta_i) p_i(\eta_i)]$, wyznaczaną numerycznie, na podstawie symulacji z rozkładu *a posteriori*, macierz Ψ jest równa odwrotności macierzy Hessego, ze znakiem minus, wyrażenia $\ln[p_i(y \mid \eta_i) p_i(\eta_i)]$ w punkcie $\eta_i = \tilde{\eta}_i$, i jest przybliżaną numerycznie macierzą kowariancji rozkładu *a posteriori* (por. Raftery, 1996), zaś m_i jest wymiarem wektora η_i.

7. WYNIKI EMPIRYCZNE

Przedmiotem modelowania jest zmienność i struktura zależności dziennych, procentowych logarytmicznych stóp zwrotu, wyliczonych na podstawie kursu zamknięcia subindeksów indeksu WIG, notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie: WIG-Banki, WIG-Informatyka, WIG-Spożywczy i WIG-Budownictwo. Warto wspomnieć, że wyniki badania zależności między wybranymi subindeksami sektorowymi indeksu WIG, z wykorzystaniem dość szerokiej klasy niebayesowskich modeli kopuli, można znaleźć w książce Domana (2011). Jak zauważono, tego typu dane charakteryzują się dość stabilną siłą powiązań, a więc stosowanie kopuli statycznych wydaje się dopuszczalne.

Analizowane w niniejszej pracy szeregi zawierały po 2539 obserwacji pochodzących z okresu od 1 sierpnia 2005 r. do 21 września 2015 r. Dwie obserwacje z każdego szeregu zostały wykorzystane jako warunki początkowe, stąd liczba obserwacji modelowanych wyniosła T = 2537 dla każdego szeregu czasowego. Charakterystyki próbkowe badanych szeregów czasowych zestawiono w tabeli 3. Kurtoza (w granicach 5,90–7,86) wskazuje na leptokurtyczność rozkładów empirycznych, zaś zarówno wartości współczynnika korelacji liniowej, jak i tau Kendalla wskazują na dodatnie zależności. Ujemna wartość współczynnika skośności sugeruje lewostronną asymetrię rozkładów, czyli przesunięcie masy prawdopodobieństwa ku lewemu ogonowi. Na wartość tego współczynnika mają jednak wpływ obserwacje znajdujące się daleko w lewym ogonie.[7]

Tabela 3.

Charakterystyki próbkowe logarytmicznych stóp zwrotu subindeksów indeksu WIG

	średnia	odchylenie standardowe	skośność	kurtoza	wartość minimalna	wartość maksymalna
WIG-Banki	0,0211	1,8112	-0,2266	7,6368	-14,4355	8,8799
WIG-Budownictwo	0,0090	1,4830	-0,3700	6,4300	-8,3796	8,2028
WIG-Informatyka	0,0130	1,3492	-0,4285	5,8967	-8,8167	6,2388
WIG-Spożywczy	0,0142	1,5023	-0,4640	7,8587	-11,8438	9,4295
korelacja liniowe (pod przekątną) / tau Kendalla (nad przekątną)						
	WIG-Banki	WIG-Budownictwo	WIG-Informatyka	WIG-Spożywczy		
WIG-Banki	1	0,3890	0,3838	0,2898		
WIG-Budownictwo	*0,5938*	1	0,3384	0,2854		
WIG-Informatyka	0,6010	*0,5480*	1	0,2605		
WIG-Spożywczy	*0,4608*	*0,4629*	*0,4346*	1		

Źródło: opracowanie własne.

[7] Oszacowanie prawdopodobieństw *a posteriori* modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) ze skośnym rozkładem *t* Studenta będzie przedmiotem odrębnego opracowania.

Tabele 4–9 zawierają oszacowania wartości brzegowych gęstości macierzy obserwacji za pomocą trzech metod numerycznych[8]: Laplace'a i Metroposlisa (LM), Chiba i Jeliazkova (ChibJ) oraz skorygowanej średniej harmonicznej (CHM). Zamieszczono również rankingi modeli uzyskane na podstawie prawdopodobieństw *a posteriori* modeli (przy jednakowych rozkładach *a priori* tych modeli) oraz kryteriów informacyjnych: Akaikego (AIC) i Schwarza (BIC). W większości przypadków rankingi uzyskany na podstawie kryteriów informacyjnych pokryły się z rankingami uzyskanymi formalnymi metodami bayesowskimi (z wykorzystaniem metod LM, ChibJ i CHM). Najniższa wartość współczynnika korelacji rang wynosi 0,95 i jest związana z rankingami uzyskanymi z wykorzystaniem metody Chiba i Jeliazkova. Oceny wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji uzyskane za pomocą tej metody obarczone są dość dużym błędem, o czym świadczą duże wartości standardowych błędów numerycznych[9] (NSE). W niektórych przypadkach na rozbieżność rankingów modeli mogły wpływać błędy aproksymacji wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji.

Tabela 4.

Ranking modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) dla pary WIG-Banki – WIG-Budownictwo

Kopula	WIG-Banki – WIG-Budownictwo										
	$\ln p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Franka	-8593,4	-8593,4 (0,993)	-8602,1 (0,485)	7	7	7	-8548,8	17123,7	17199,6	7	7
Claytona	-8616,8	-8626,5 (0,976)	-8618,1 (0,665)	9	9	9	-8578,1	17182,2	17258,1	9	9
Obrócona Claytona	-8699,4	-8708,7 (0,983)	-8695,1 (0,306)	10	10	10	-8664,5	17355,0	17430,9	10	10
Gumbela	-8615,8	-8625,5 (0,971)	-8617,9 (0,63)	8	8	8	-8577,0	17180,1	17256,0	8	8
Obrócona Gumbela	-8563,9	-8572,5 (0,987)	-8560,4 (0,624)	6	6	6	-8522,7	17071,5	17147,4	6	6
Claytona-Gumbela BB1	**-8551,0**	**-8561,8 (0,989)**	**-8551,3 (0,349)**	**2**	**1**	**2**	**-8509,5**	**17046,9**	**17128,7**	**2**	**2**
Joego-Claytona BB7	-8559,8	-8571,2 (0,967)	-8560,0 (0,749)	5	5	5	-8520,3	17068,6	17150,3	5	5

[8] Prezentowane wyniki uzyskano na podstawie 110000 iteracji algorytmu MH, w tym 10000 cykli spalonych oraz 100000 dodatkowych losowań wykonanych w ramach metody Chiba i Jeliazkova oraz w ramach MCIS dla korekty Lenka ($\hat{P}_i(A_i)$).

[9] Obliczając standardowy błąd numeryczny (ang. *numerical standard error*, NSE, zob. Chib, Jeliazkov, 2001) uwzględniono 40 opóźnień.

Tabela 4. (cd.)

Kopula	WIG-Banki – WIG-Budownictwo										
	ln$p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Symetryzowana Joego-Claytona	-8556,8	-8567,7 (0,993)	-8553,6 (0,537)	4	4	4	-8517,6	17063,2	17144,9	4	4
Normalna	-8556,2	-8566,7 (0,971)	-8552,1 (0,334)	3	3	3	-8517,1	17060,3	17136,2	3	3
***t* Studenta**	**-8548,3**	**-8562,0 (0,988)**	**-8544,2 (0,384)**	**1**	**2**	**1**	**-8504,9**	**17037,8**	**17119,5**	**1**	**1**
Niezależność	-9020,0	-9028,0 (0,999)	-9020,4 (0,817)	11	11	11	-8973,8	17971,6	18041,7	11	11

ln$p_i(y)$ – logarytm naturalny wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji, LM – metoda Laplace'a i Metropolisa, ChibJ – metoda Chiba i Jeliazkova, CHM – skorygowana średnia harmoniczna, NSE – standardowy błąd numeryczny (w nawiasie), max lnL – maksimum logarytmu funkcji wiarygodności, AIC – kryterium informacyjne Akaikego, BIC – kryterium informacyjne Schwarza.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5.

Ranking modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) dla pary WIG-Banki – WIG-Spożywczy

Kopula	WIG-Banki – WIG-Spożywczy										
	ln$p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Franka	-8850,3	-8850,2 (0,318)	-8852,1 (0,248)	8	8	8	-8804,2	17634,3	17710,2	8	v8
Claytona	-8839,4	-8851,4 (0,994)	-8838,4 (0,655)	7	7	7	-8796,3	17618,6	17694,5	7	7
Obrócona Claytona	-8935,0	-8945,5 (0,957)	-8933,5 (0,187)	10	10	10	-8894,5	17815,0	17890,9	10	10
Gumbela	-8883,1	-8894,4 (0,987)	-8880,0 (0,269)	9	9	9	-8841,4	17708,7	17784,6	9	9
Obrócona Gumbela	**-8817,8**	**-8830,8** (0,988)	**-8815,0** (0,334)	**1**	**1**	**1**	**-8774,4**	**17574,9**	**17650,8**	**1**	**1**
Claytona-Gumbela BB1	**-8822,2**	**-8836,2 (0,994)**	**-8817,1 (0,656)**	**2**	**2**	**2**	**-8776,9**	**17581,8**	**17663,5**	**2**	**2**
Joego-Claytona BB7	-8826,9	-8840,5 (0,989)	-8823,7 (0,549)	5	5	4	-8781,9	17591,8	17673,6	5	5
Symetryzowana Joego-Claytona	-8823,5	-8837,3 (0,984)	-8820,8 (0,504)	3	3	3	-8778,4	17584,8	17666,6	3	3

Kopula	WIG-Banki – WIG-Spożywczy										
	ln$p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Normalna	-8834,8	-8846,5 (0,984)	-8831,7 (0,465)	6	6	6	-8790,9	17607,9	17683,8	6	6
t Studenta	-8824,5	-8837,8 (0,994)	-8825,2 (0,952)	4	4	5	-8779,2	17586,4	17668,1	4	4
Niezależność	-9085,3	-9097,7 (0,984)	-9087,6 (0,844)	11	11	11	-9042,7	18109,4	18179,5	11	11

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6.

Ranking modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) dla pary WIG-Informatyka – WIG-Spożywczy

Kopula	WIG-Informatyka – WIG-Spożywczy										
	ln$p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Franka	-8332,6	-8332,6 (0,972)	-8344,5 (0,368)	8	8	8	-8286,1	16598,2	16674,1	8	8
Claytona	-8303,3	-8316,4 (0,994)	-8304,0 (0,506)	6	6	6	-8260,0	16546,1	16622,0	6	6
Obrócona Claytona	-8399,6	-8410,6 (0,989)	-8398,6 (0,335)	10	10	10	-8356,7	16739,4	16815,3	10	10
Gumbela	-8351,3	-8362,2 (0,989)	-8350,2 (0,36)	9	9	9	-8307,8	16641,5	16717,4	9	9
Obrócona Gumbela	**-8289,4**	**-8302,4 (0,984)**	**-8287,2 (0,291)**	**1**	**1**	**1**	**-8245,8**	**16517,5**	**16593,4**	**1**	**1**
Claytona-Gumbela BB1	**-8291,4**	**-8305,3 (0,989)**	**-8290,3 (0,702)**	**2**	**2**	**2**	**-8244,8**	**16517,5**	**16599,3**	**2**	**2**
Joego-Claytona BB7	-8292,7	-8306,4 (0,994)	-8292,0 (0,497)	4	4	3	-8246,9	16521,7	16603,5	4	4
Symetryzowana Joego-Claytona	-8291,5	-8305,5 (0,994)	-8294,8 (0,566)	3	3	4	-8245,7	16519,4	16601,1	3	3
Normalna	-8311,8	-8322,9 (0,989)	-8310,5 (0,523)	7	7	7	-8266,9	16559,7	16635,6	7	7
t Studenta	-8296,1	-8310,1 (0,989)	-8296,2 (0,487)	5	5	5	-8250,5	16529,0	16610,7	5	5
Niezależność	-8518,3	-8529,8 (0,994)	-8520,1 (0,716)	11	11	11	-8476,2	16976,4	17046,4	11	11

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7.

Ranking modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) dla pary WIG-Informatyka – WIG-Budownictwo

Kopula	WIG-Informatyka – WIG-Budownictwo										
	$\ln p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Franka	-8145,7	-8145,7 (0,352)	-8147,8 (0,655)	8	8	8	-8103,6	16233,1	16309,0	8	8
Claytona	-8128,5	-8136,7 (0,985)	-8129,6 (0,479)	7	7	7	-8090,1	16206,3	16282,2	7	7
Obrócona Claytona	-8220,6	-8230,3 (0,98)	-8221,4 (0,232)	10	10	10	-8181,1	16388,1	16464,0	10	10
Gumbela	-8149,7	-8158,7 (0,988)	-8150,2 (0,318)	9	9	9	-8109,2	16244,4	16320,3	9	9
Obrócona Gumbela	-8091,5	-8094,6 (0,328)	-8093,4 (0,528)	5	2	4	-8053,6	16133,2	16209,1	5	5
Claytona-Gumbela BB1	**-8083,7**	**-8092,9 (0,999)**	**-8084,7 (0,535)**	**1**	**1**	**1**	**-8043,0**	**16114,1**	**16195,8**	**1**	**1**
Joego-Claytona BB7	-8085,4	-8096,4 (0,984)	-8087,9 (0,532)	3	4	3	-8046,3	16120,6	16202,3	3	3
Symetryzowana Joego-Claytona	**-8084,3**	**-8094,9 (0,989)**	**-8086,5 (0,688)**	**2**	**3**	**2**	**-8044,2**	**16116,3**	**16198,1**	**2**	**2**
Normalna	-8104,2	-8106,6 (0,275)	-8106,2 (0,333)	6	6	6	-8066,0	16158,0	16233,9	6	6
t Studenta	-8088,7	-8102,2 (0,98)	-8093,8 (0,86)	4	5	5	-8048,0	16124,0	16205,8	4	4
Niezależność	-8452,0	-8461,1 (0,984)	-8453,3 (0,42)	11	11	11	-8407,3	16838,6	16908,6	11	11

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8.

Ranking modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) dla pary WIG-Informatyka – WIG-Banki

Kopula	WIG-Informatyka – WIG-Banki										
	$\ln p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Franka	-8448,4	-8448,4 (0,954)	-8461,6 (0,463)	7	7	7	-8404,6	16835,1	16911,0	7	7
Claytona	-8463,1	-8473,5 (0,937)	-8463,5 (0,216)	9	9	9	-8425,6	16877,2	16953,1	9	9

Obrócona Claytona	-8540,6	-8551,6 (0,979)	-8539,0 (0,414)	10	10	10	-8507,3	17040,6	17116,5	10	10
Gumbela	-8456,0	-8468,4 (0,984)	-8453,0 (0,716)	8	8	8	-8420,2	16866,4	16942,4	8	8
Obrócona Gumbela	-8412,3	-8424,0 (0,971)	-8409,1 (0,421)	6	6	6	-8373,9	16773,9	16849,8	6	6
Claytona-Gumbela BB1	**-8395,4**	**-8395,4 (0,367)**	**-8397,0 (0,783)**	**1**	**2**	**2**	**-8354,6**	**16737,2**	**16819,0**	**2**	**2**
Joego-Claytona BB7	-8400,3	-8411,6 (0,979)	-8398,7 (0,660)	4	3	4	-8363,2	16754,4	16836,1	4	5
Symetryzowana Joego-Claytona	-8399,3	-8413,4 (0,963)	-8398,3 (0,385)	3	4	3	-8362,5	16753,0	16834,7	3	4
Normalna	-8403,2	-8414,0 (0,989)	-8402,4 (0,626)	5	5	5	-8364,5	16755,1	16831,0	5	3
***t* Studenta**	**-8396,4**	**-8395,3 (0,623)**	**-8395,0 (0,460)**	**2**	**1**	**1**	**-8353,5**	**16734,9**	**16816,7**	**1**	**1**
Niezależność	-8858,6	-8872,1 (0,883)	-8856,6 (0,641)	11	11	11	-8815,0	17653,9	17724,0	11	11

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 9.

Ranking modeli Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) dla pary WIG-Spożywczy – WIG-Budownictwo

Kopula	WIG-Spożywczy – WIG-Budownictwo										
	ln$p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Franka	-8463,1	-8463,1 (0,108)	-8464,5 (0,745)	8	8	8	-8416,1	16858,2	16934,1	8	8
Claytona	-8430,3	-8438,1 (0,999)	-8430,9 (0,679)	6	5	6	-8384,8	16795,7	16871,6	6	6
Obrócona Claytona	-8542,6	-8552,5 (0,98)	-8544,9 (0,919)	10	10	10	-8499,4	17024,8	17100,7	10	10
Gumbela	-8491,5	-8501,4 (0,979)	-8493,2 (0,555)	9	9	9	-8447,9	16921,9	16997,8	9	9
Obrócona Gumbela	**-8407,2**	**-8409,4** (0,198)	**-8408,3** (0,473)	**1**	**1**	**1**	**-8362,9**	**16751,7**	**16827,6**	**1**	**1**
Claytona-Gumbela BB1	-8418,8	-8420,4 (0,178)	-8419,5 (0,277)	3	2	3	-8371,7	16771,5	16853,2	3	3

Tabela 9. (cd.)

Kopula	WIG-Spożywczy – WIG-Budownictwo										
	$\ln p_i(y)$ (NSE)			Ranking			MNW	Kryterium inf.		Ranking	
	LM	ChibJ	CHM	LM	ChibJ	CHM	max lnL	AIC	BIC	AIC	BIC
Joego-Claytona BB7	-8421,0	-8433,1 (0,967)	-8422,0 (0,352)	4	4	4	-8374,6	16777,2	16858,9	4	4
Symetryzowana Joego-Claytona	**-8414,8**	**-8425,7 (0,989)**	**-8415,0 (0,376)**	**2**	**3**	**2**	**-8367,6**	**16763,1**	**16844,9**	**2**	**2**
Normalna	-8439,2	-8449,3 (0,988)	-8433,6 (0,265)	7	7	7	-8393,9	16813,7	16889,6	7	7
t Studenta	-8427,3	-8441,6 (0,967)	-8427,8 (1,014)	5	6	5	-8380,4	16788,8	16870,6	5	5
Niezależność	-8678,8	-8687,8 (0,993)	-8680,3 (0,55)	11	11	11	-8635,0	17294,1	17364,1	11	11

Źródło: opracowanie własne.

Dla sześciu rozważanych par szeregów czasowych, formalne podejście bayesowskie do porównywania modeli, a także kryteria informacyjne pozwoliły wyłonić trzy najbardziej prawdopodobne kopule: obrócona Gumbela (najlepsza dla trzech par szeregów), *t* Studenta (najlepsza dla dwóch par), a następnie Claytona-Gumbela (BB1, najlepsza dla jednej pary szeregów). Zarówno w ujęciu bayesowskim, jak i klasycznym założenie niezależności procesów zostało „odrzucone przez dane" dla wszystkich par szeregów. Obrócona kopula Claytona (charakteryzująca się zerową zależnością w dolnym ogonie, $\lambda^L = 0$) we wszystkich przypadkach zajęła przedostanie miejsce w rankingach, po kopuli odpowiadającej niezależności procesów. Odległe miejsce w rankingach (8 lub 9) zajmuje również model z kopulą Gumbela. Obrócenie kopuli Gumbela o 180 stopni, a tym samym dopuszczenie dodatnich zależności w dolnym ogonie, przy braku zależności w górnym ogonie ($\lambda^U = 0$), poprawiło moc wyjaśniającą modelu Copula-AR(1)-*t*-GARCH(1,1). Na pierwszych trzech miejscach w rankingach najczęściej pojawiał się model z kopulą Claytona-Gumbela (aż 6 razy: raz na miejscu pierwszym, 4 razy na miejscu drugim i 1 raz na miejscu trzecim) oraz modele ze symetryzowaną kopulą Joego-Claytona (4 razy: po 2 razy na miejscach drugim i trzecim).

Charakterystyki rozkładów *a posteriori* współczynnika tau Kendalla (przedstawione w tabeli 10) wskazują na dodatnią zależność między procesami opisującymi stopy zwrotu subindeksów indeksu WIG.

Tabela 10.

Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe (w nawiasach) *a posteriori* współczynnika tau Kendalla i zależności ogonowych

Kopula	WIG-Informatyka – WIG-Spożywczy			WIG-Informatyka – WIG-Budownictwo			WIG-Spożywczy – WIG-Budownictwo		
	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L
Franka	0,263 (0,012)	0 (0)	0 (0)	0,336 (0,012)	0 (0)	0 (0)	0,282 (0,012)	0 (0)	0 (0)
Claytona	0,213 (0,011)	0 (0)	0,279 (0,023)	0,271 (0,01)	0 (0)	0,393 (0,02)	0,236 (0,011)	0 (0)	0,326 (0,022)
Obrócona Claytona	0,190 (0,012)	0,228 (0,026)	0 (0)	0,256 (0,011)	0,365 (0,022)	0 (0)	0,201 (0,012)	0,251 (0,025)	0 (0)
Gumbela	0,240 (0,013)	0,307 (0,015)	0 (0)	0,312 (0,012)	0,389 (0,013)	0 (0)	0,254 (0,012)	0,323 (0,014)	0 (0)
Obrócona Gumbela	**0,240 (0,012)**	**0 (0)**	**0,306 (0,014)**	0,311 (0,012)	0 (0)	0,388 (0,013)	**0,263 (0,013)**	**0 (0)**	**0,333 (0,014)**
Claytona-Gumbela, BB1	0,248 (0,012)	0,137 (0,024)	0,200 (0,03)	**0,323 (0,012)**	**0,234 (0,022)**	**0,260 (0,031)**	0,267 (0,012)	0,135 (0,025)	0,252 (0,03)
Joego-Claytona, BB7	0,242 (0,012)	0,167 (0,03)	0,235 (0,026)	0,315 (0,012)	0,285 (0,026)	0,322 (0,025)	0,261 (0,012)	0,158 (0,032)	0,288 (0,025)
Symetryzowana Joego-Claytona	–	0,108 (0,031)	0,283 (0,023)	–	0,239 (0,03)	0,356 (0,022)	–	0,102 (0,03)	0,329 (0,022)
Normalna	0,257 (0,012)	0 (0)	0 (0)	0,332 (0,011)	0 (0)	0 (0)	0,276 (0,012)	0 (0)	0 (0)
t Studenta	0,257 (0,013)	0,063 (0,025)	0,063 (0,025)	0,329 (0,012)	0,103 (0,034)	0,103 (0,034)	0,276 (0,012)	0,065 (0,023)	0,065 (0,023)

Kopula	WIG-Informatyka – WIG-Banki			WIG-Banki – WIG-Budownictwo			WIG-Banki – WIG-Spożywczy		
	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L
Franka	0,382 (0,011)	0 (0)	0 (0)	0,388 (0,011)	0 (0)	0 (0)	0,291 (0,012)	0 (0)	0 (0)
Claytona	0,303 (0,01)	0 (0)	0,450 (0,017)	0,309 (0,01)	0 (0)	0,460 (0,017)	0,237 (0,011)	0 (0)	0,327 (0,022)
Obrócona Claytona	0,293 (0,01)	0,433 (0,018)	0 (0)	0,292 (0,011)	0,431 (0,019)	0 (0)	0,209 (0,012)	0,270 (0,025)	0 (0)
Gumbela	0,354 (0,012)	0,436 (0,013)	0 (0)	0,355 (0,011)	0,437 (0,012)	0 (0)	0,262 (0,013)	0,332 (0,015)	0 (0)

Tabela 10. (cd.)

Kopula	WIG-Informatyka – WIG-Banki			WIG-Banki – WIG-Budownictwo			WIG-Banki – WIG-Spożywczy		
	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L
Obrócona Gumbela	0,352 (0,012)	0 (0)	0,433 (0,013)	0,359 (0,011)	0 (0)	0,440 (0,012)	**0,268 (0,012)**	**0 (0)**	**0,339 (0,014)**
Claytona-Gumbela, BB1	0,365 (0,012)	0,292 (0,022)	0,288 (0,033)	0,368 (0,011)	0,288 (0,021)	0,305 (0,031)	0,274 (0,012)	0,162 (0,024)	0,233 (0,032)
Joego-Claytona, BB7	0,354 (0,011)	0,348 (0,024)	0,367 (0,024)	0,358 (0,012)	0,344 (0,024)	0,383 (0,024)	0,266 (0,012)	0,187 (0,031)	0,279 (0,026)
Symetryzowana Joego-Claytona	–	0,312 (0,027)	0,394 (0,022)	–	0,309 (0,028)	0,408 (0,022)	–	0,135 (0,031)	0,319 (0,023)
Normalna	0,375 (0,011)	0 (0)	0 (0)	0,379 (0,01)	0 (0)	0 (0)	0,282 (0,011)	0 (0)	0 (0)
t Studenta	**0,375 (0,011)**	**0,079 (0,034)**	**0,079 (0,034)**	**0,377 (0,012)**	**0,078 (0,03)**	**0,078 (0,03)**	0,284 (0,012)	0,048 (0,024)	0,048 (0,024)

Wielkości uzyskane w modelach najbardziej prawdopodobnych *a posteriori* zaznaczono pogrubioną czcionką.

Źródło: opracowanie własne.

Wartości oczekiwane *a posteriori* współczynnika tau Kendalla porównano z wartościami próbkowymi tego współczynnika. Najmniejsza rozbieżność wystąpiła w przypadku kopuli Franka (podobne wyniki uzyskał Doman, 2011). Model z kopulą Franka zajmuje 8 lub 7 miejsce w rankingu (m.in. ze względu na to, że kopula ta nie ma zależności w ogonach). Zatem wydaje się, że porównanie modeli pod względem dopasowania „implikowanych" (wynikających z estymacji parametrów kopuli, zob. Doman, 2011, str. 56 i 68, a w ujęciu bayesowskim wartości oczekiwanych *a posteriori*) współczynników tau Kendalla z próbkowymi nie prowadzi do wyłonienia modelu o największej „mocy wyjaśniającej". Jeśli chodzi o współczynniki zależności w ogonach, to w większości przypadków rozkłady *a posteriori* (tych współczynników, które podlegały estymacji) są bardzo skupione wokół modalnej, o czym świadczą ich odchylenia standardowe *a posteriori*.

8. PODSUMOWANIE

W pracy dokonano porównania wybranych modeli Copula-AR-GARCH, wykorzystanych do opisu zmienności subindeksów indeksu WIG. W tym celu wykorzystano podejście bayesowskie, które dostarcza formalnego narzędzia porównywania modeli w postaci ich prawdopodobieństw *a posteriori*. Wykorzystując metody Monte

Carlo oparte na łańcuchach Markowa obliczono prawdopodobieństwa *a posteriori* jedenastu modeli, w których jednowymiarowe, warunkowe rozkłady są opisywane za pomocą specyfikacji AR(1)-*t*-GARCH(1,1), natomiast ich struktura powiązań zależy od kopuli. Dokonano również nieformalnego porównania tych modeli poprzez ich estymację metodą największej wiarygodności i wykorzystanie kryteriów informacyjnych Akaikego i Schwarza. Uzyskane wyniki wskazały dużą przydatność tych bardzo prostych i nieformalnych metod porównywania modeli Copula-AR-GARCH. Dla sześciu par szeregów czasowych rankingi modeli uzyskane metodami formalnymi (w ujęciu bayesowskim) i metodami *ad hoc* (poprzez AIC i BIC) są bardzo zbliżone (a w wielu przypadkach identyczne). Na pierwszych trzech miejscach w rankingach najczęściej pojawiały się modele z kopulą Claytona-Gumbela, symetryzowaną kopulą Joego-Claytona, obróconą Gumbela oraz *t* Studenta.

Porównanie modeli pod względem zgodności wartości oczekiwanych *a posteriori* (czy ocen) współczynnika tau Kendalla z jego próbkowym odpowiednikiem nie prowadzi do wyłonienia modelu posiadającego największą moc wyjaśniającą. Najlepiej dopasowany do danych pod tym względem okazał się dwuwymiarowy model AR(1)-*t*-GARCH(1,1) z kopulą Franka, zajmujący odległe miejsca w rankingu.

Kolejnym ważnym krokiem byłoby formalne porównanie modeli Copula-AR-GARCH z modelami klasy MSV (ang. *Multivariate Stochastic Volatility*), MGARCH (ang. *Multivariate GARCH*) lub tych opartych na strukturach hybrydowych. Nie ma bowiem opracowań poświęconych tej tematyce. Zagadnienia te wykraczają jednak poza zakres tematyczny niniejszego artykułu.

LITERATURA

Abramowitz M., Stegun N., (1968), *Handbook of Mathematical Functions,* Dover Publications, New York.

Akaike H., (1973), Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, 2nd International Symposium on Information Theory, w: Petrov B. N., Csáki F., (red.), Akadémia Kiado, Budapest, 267–281.

Chib S., (1995), Marginal Likelihood from the Gibbs Output, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1313–1321.

Chib S., Jeliazkov I., (2001), Marginal Likelihood from the Metropolis-Hastings Output, *Journal of the American Statistical Association*, 96, 270–281.

Choroś B., Ibragimov R., Permiakova E., (2010), Copula Estimation, w: Jaworski P., Hardle W., Durante F., Rychlik T., (red.), *Copula Theory and Its Applications*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

Craiu V. R., Sabeti A., (2012), In Mixed Company: Bayesian Inference for Bivariate Conditional Copula Models with Discrete and Continuous Outcomes, *Journal of Multivariate Analysis*, 110, 106–120.

de Bruijn N. G., (1970), *Asymptotic Methods in Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

Doman R., (2011), *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.

Doman M., Doman R., (2014), *Dynamika zależności na globalnym rynku finansowym*, Difin SA, Warszawa.

Durante F., Sempi C., (2016), *Principles of Copula Theory*, CRS Press, Taylor and Francis Group LLC.

Fang Y., Madsen L., Liu L., (2014), Comparison of Two Methods to Check Copula Fitting, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 44 (1), IJAM_44_1_07.

Genest C., Rémillard B., Beaudoin D., (2009), Goodness-of-Fit Tests for Copulas: A Review and a Power Study, *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 199–213.

Jaworski P., (2012), Wybrane zagadnienia modelowania zmienności na rynkach finansowych z wykorzystaniem kopuli i procesów GARCH, http://docplayer.pl/1206688-Wybrane-zagadnienia-modelowania-zmiennosci-na-rynkach-finansowych-z-wykorzystaniem-kopuli-i-procesow-garch.html (dostęp: 5.05.2016)

Jeffreys H., (1961), *Theory of Probability*, Oxford University Press, London.

Joe H., (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.

Joe H., (2005), Asymptotic Efficiency of the Two-Stage Estimation Method for Copula-Based Models, *Journal of Multivariate Analysis*, 94, 401–419.

Joe H., Xu J. J., (1996), The Estimation Method of Inference Function for Margins for Multivariate Models, *Technical Report no. 166*, Department of Statistics, University of British Columbia, Vancouver. https://open.library.ubc.ca/cIRcle/collections/facultyresearchandpublications/52383/items/1.0225985 (dostęp: 6.05.2016)

Jondeau E., Rockinger M., (2006), The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application, *Journal of International Money and Finance*, 25, 827–853.

Kass R. E., Raftery A. E., (1995), Bayes Factors, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773–795.

Kojadinovic I., Yan J., Holmes M., (2011), Fast Large-Sample Goodness-of-Fit Tests for Copulas, *Statistica Sinica*, 21, 841–871.

Lenk P., (2009), Simulation Pseudo-Bias Correction to the Harmonic Mean Estimator of Integrated Likelihoods, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 18, 941–960.

Nelsen R. B., (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.

Newey W. K., West, K. D., (1987), A Simple Positive Semi-Definite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica*, 55, 703–708.

Newton M. A., Raftery A. E., (1994), Approximate Bayesian Inference by the Weighted Likelihood Bootstrap, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 56 (1), 3–48.

Osiewalski J., (2001), *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.

Osiewalski J., Pipień M., (2004), Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type models for the Main Exchange Rates in Poland, *Journal of Econometrics*, 123, 371–391.

Osiewalski J., Steel M. F. J., (1993), A Bayesian Perspective on Model Selection, maszynopis; opublikowano w języku hiszpańskim: Una perspectiva bayesiana en sección de modelos, *Cuadernos Economicos ICE*, 55, 327–351.

Pajor A., (2003), *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Monografie: Prace Doktorskie, Nr 2, Wydawnictwo AE w Krakowie, Kraków.

Pajor A., Osiewalski J., (2013), A Note on Lenk's Correction of the Harmonic Mean Estimator, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics*, 5 (4), 271–275.

Patton A. J., (2001), Modelling Time Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula, *Discussion Paper 2001–09 University of California*, San Diego.

Patton A. J., (2006a), Estimation of Multivariate Models for Time Series of Possibly Different Lengths, *Journal of Applied Econometrics*, 21 (2), 147–173.

Patton A. J., (2006b), Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, *International Economic Review*, 47 (2), 527–556.

Patton A. J., (2012), A Review of Copula Models for Economic Time Series, *Journal of Multivariate Analysis*, 100, 4–18.

Patton A. J., (2013), Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series, w: Elliott G., Timmermann A., (red.), *Handbook of Economic Forecasting*, 2, Springer Verlag.

Raftery A. E., (1996), Hypothesis Testing and Model Selection, w: Gilks W. R., Spiegelhalter D. J., Richardson S., (red.), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman and Hall, London, 163–188.

Regis L., (2011), A Bayesian Copula Model for Stochastic Claims Reserving, working paper no. 227, Collegio Carlo Alberto, http://www.carloalberto.it/assets/working-papers/no.227.pdf (dostęp: 6.05.2016).

Rossi J. L., Ehlers R. S., Andrade M. G., (2012), Copula-GARCH Model Selection: A Bayesian Approach, Technical Report 88, University of São Paulo.

Schwarz G., (1978), Estimating the dimension of a model, *Annals of Statistics*, 6, 461–464.

Silva R. S., Lopes H. F., (2008), Copula, Marginal Distributions and Model Selection: a Bayesian Note, *Statistics and Computing*, 18 (3), 313–320.

Sklar A., (1959), Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges', *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8, 229–231.

Smith M. D., (2003), Modelling Sample Selection Using Archimedean Copulas, *Econometrics Journal*, 6, 99–123.

Smith M. S., (2013), Bayesian Approaches to Copula Modelling, w: Damien P., Dellaportas P., Polson N., Stephens D., (red.), *Bayesian Theory and Applications*, Oxford University Press, Oxford, 336–358. http://works.bepress.com/michael_smith/30/ (dostęp: 6.05.2016).

Tierney L., (1994), Markov Chains for Exploring Posterior Distributions (with discussion), *The Annals of Statistics*, 22, 1701–1762.

Zellner A., (1971), *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, J. Wiley, New York.

FORMALNE PORÓWNANIE MODELI COPULA-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) DLA SUBINDEKSÓW INDEKSU WIG

Streszczenie

Kopule stały się jednym z popularnych narzędzi modelowania zależności między szeregami czasowymi, pochodzącymi z rynków finansowych. Głównym celem pracy jest formalne, bayesowskie porównanie mocy wyjaśniającej dwuwymiarowych modeli Copula-AR-GARCH, różniących się strukturą zależności warunkowych, opisaną przez poszczególne kopule. Dla porównania dokonano również estymacji modeli Copula-AR-GARCH metodą największej wiarygodności, a następnie zbudowano ranking modeli na podstawie kryteriów informacyjnych Akaikego (AIC) oraz Schwarza (BIC). Modele Copula-AR-GARCH zostały wykorzystane do opisu zmienności i zależności dziennych stóp zwrotu subindeksów indeksu WIG. Wyniki wskazały na dużą przydatność bardzo prostych i nieformalnych metod porównywania modeli Copula-AR-GARCH. Dla sześciu par szeregów czasowych rankingi modeli uzyskane metodami formalnymi (w ujęciu bayesowskim) i metodami *ad hoc* (poprzez AIC i BIC) okazały się bardzo zbliżone, a w wielu przypadkach identyczne.

Słowa kluczowe: kopula, model Copula-AR-GARCH, bayesowskie porównanie modeli

FORMAL COMPARISON OF COPULA-AR(1)-*t*-GARCH(1,1) MODELS FOR SUB-INDICES OF THE STOCK INDEX WIG

A b s t r a c t

Copulas have become one of most popular tools used in modelling the dependencies among financial time series. The main aim of the paper is to formally assess the relative explanatory power of competing bivariate Copula-AR-GARCH models, which differ in assumptions on the conditional dependence structure represented by particular copulas. For the sake of comparison the Copula-AR-GARCH models are estimated using the maximum likelihood method, and next they are informally compared and ranked according to the values of the Akaike (AIC) and of the Schwarz (BIC) information criteria. We apply these tools to the daily growth rates of four sub-indices of the stock index WIG published by the Warsaw Stock Exchange. Our results indicate that the informal use of the information criteria (AIC or BIC) leads to very similar ranks of models as compared to those obtained by the use of the formal Bayesian model comparison.

Keywords: Copula, Copula-AR-GARCH model, Bayesian model comparison